## Vor kurzem erst erbaut und eingerichtet – heute bereits in vollem Betrieb


**A.W. Faber-Castell, Rechenstabfabrik, Engelhartszell/OÖ**

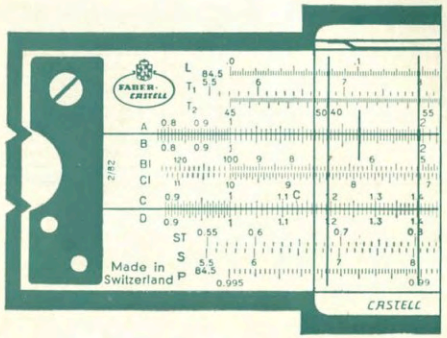
Diese moderne Fabrik befaßt sich mit der Herstellung der Faber-Castell-Rechenstäbe. Sie haben Weltgeltung. Präzision, Haltbarkeit und Preiswürdigkeit sind ihre Merkmale. Techniker und Ingenieure, Architekten und Baumeister, Studenten, Schüler und alle, die mit dem Rechenstab arbeiten, wissen diese Eigenschaften zu schätzen.

### Faber-Castell-Rechenstäbe für Techniker

Duplex 2/82, Taschen-Duplex 62/82, Novo-Duplex 2/83, Darmstadt 111/54, Taschen-Darmstadt 67/54b, Rietz 111/87, Taschen-Rietz 67/87.

### Faber-Castell-Schulrechenstäbe

Schul-D-Stab 52/82, Schul-Rietz 57/87, Schul-Rietz N 57/88, Schulstab Log Log 57/89 und viele Sondermodelle für Spezialzwecke. Verlangen Sie ausführliches Informationsmaterial bei unserer Zweigniederlassung!




Verkauf nur im Fachgeschäft

FABER-CASTELL

A.W. Faber-Castell Zweigniederlassung 1061 Wien-VII/62 Lindengasse 4

Engelhartszell

FABER-CASTELL

S

1966

# Rechenstab-Brief

**Berichte und Anregungen für das Stabrechnen**

## Aus dem Inhalt



**Verantwortliche Schriftleitung:**

Dr. Peter Pirchan
Ing. Harald Bachmann

**Hinweis:**

Der Castell-Rechenstab-Brief wird kostenlos an Interessenten verschickt
Weitere Druckschriften können angefordert werden.



# Die Winkelfunktions-Skalen auf den Faber-Castell-Schul-Rechenstäben

von Ingenieur H. Bachmann

Seit der Jahrhundertwende hat der Rechenstab in seinem wesentlichen Grundaufbau seine Gestalt beibehalten, das heißt, er besteht nach wie vor aus einem festen Skalenkörper, dem Stabkörper, einem in Längsrichtung verschiebbaren Skalenkörper, dem Schieber, der oft auch Zunge genannt wird, und dem längsbeweglichen Läufer zum Festhalten, Ablesen oder Einstellen der Zahlenwerte auf den Skalen.

Allerdings hat der Rechenstab in den letzten Jahren eine beachtliche Erweiterung hinsichtlich der Anzahl der aufgebrachten Skalen, des sogenannten Skalenbildes, erfahren. Vor allem ist dabei mit dem Fortschreiten der Technik die Forderung nach besonderen Funktionsskalen entsprechend berücksichtigt worden. Dadurch ist der Rechenstab in seiner Form breiter geworden. Dies hat schließlich zu der neuartigen Gestalt des **doppelseitigen** Rechenstabes geführt, die sich heute immer mehr durchsetzt. Mit Hilfe des den Stabkörper gänzlich umfassenden Läufers ist es bei diesem Modell möglich, trotz des umfangreichen Skalenbildes alle Skalen zueinander in Beziehung zu bringen.

Eine weitere Entwicklung in dieser Beziehung stellt das neue Verfahren dar, mehrere Skalen, die in ihren Funktionswerten nur geringe Unterschiede aufweisen, ineinander zu legen. Dabei ist es als besonders vorteilhaft zu bezeichnen, wenn außerdem noch zusammengehörige Skalen als Doppelskalen ausgebildet werden, d. h. die Skalen werden so nebeneinander gereiht, daß Skalengrund an Skalengrund liegt, ähnlich der bekannten Doppelskalen beim Thermometer bzw. Barometer.

Mit diesen Vereinfachungsbestrebungen am Skalenbild muß jedoch noch eine besondere Skalenanordnung Berücksichtigung finden, die es gestattet, möglichst alle gleichartigen Rechnungen nach dem **gleichen, übersichtlichen Einstell- bzw. Rechenschema** durchführen zu können.

Betrachtet man beispielsweise den allgemein bekannten Rietz-Rechenstab, der hinsichtlich des Skalenaufbaues als der „klassische" Rechenstab bezeichnet werden muß, so erkennt man, daß die Skalenanordnung für die in der Praxis immerhin ziemlich häufig anfallenden trigonometrischen Rechnungen nicht besonders glücklich gewählt ist. Will man bei diesem Stab beispielsweise für die Katheten 3 und 4 die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ermitteln, so muß man die inverse Rechnung anwenden und dabei noch den Schieber um eine Dekade nach links durchschieben. Man stellt somit 4 : 3 (C 3 über D 4) ein und erhält nach dem Durchschieben um eine Skalenlänge beim Index der Stabrückseite im linken Ausschnitt den Winkel 36° 52′ auf der Tangensskala. Nun muß man die gleichen Winkel im rechten Ausschnitt auf der Sinusskala einstellen und kann auf der Stabvorderseite bei C 3 den Wert 5 auf der D-Skala ablesen. Bei diesen

Rechnungen geht infolge der reziproken Einstellung und des Wendens des Rechenstabes sowie des öfters erforderlichen Durchschiebens der Überblick über das angewandte Rechenschema leicht verloren.

Wesentlich günstiger ist in dieser Beziehung die Anordnung der **Winkelfunktionsskalen auf der Stabvorderseite,** wie dies erstmalig beim Darmstadt-Rechenstab der Fall war und auf unsere neuesten Schul-Rechenstäbe übernommen wurde. Mit Benutzung der inversen Grundskala (CI) läßt sich dann das Seitenverhältnis des rechtwinkligen Dreiecks sehr übersichtlich einstellen und der gesuchte Winkel sofort bequem auf der entsprechenden Winkelfunktionsskala ablesen. Etwas unübersichtlich wird die Rechnung jedoch, wenn bei Benutzung der Tangensskala Winkel über $45^0$ auftreten. In diesem Fall muß mit der inversen Funktion, also mit Cotangens gerechnet werden und der Winkel auch entsprechend als Ergänzungswinkel zum rechten Winkel abgelesen werden. Wenn diese Rechnung auch keine großen Schwierigkeiten bereitet, so ist sie doch — infolge des nötigen Umdenkens — lästig und führt auch manchmal zu Fehlablesungen.

Um nun diese Nachteile zu vermeiden und das gleiche Einstellschema für Winkel unter $45^0$ wie über $45^0$ anwenden zu können, tragen die neueren Castell-Rechenstäbe eine zusätzliche Tangensskala für die Winkel über $45^0$, die sogenannte **$T_2$-Skala.**

Damit ist für **alle** trigonometrischen Funktionen ein Skalenbereich von etwa **$6^0$** bis mindestens **$84^0$** erreicht.

Die weiteren Überlegungen gingen nun dahin, diesen Skalenbereich der trigonometrischen Funktionen möglichst so weit zu erweitern, daß **die Genauigkeit des Rechenstabes von etwa 3 Stellen absolut in diesem Bereich voll ausgenutzt werden kann.**

Diese Erweiterung konnte nun bei den neuesten Castell-Rechenstäben dadurch berücksichtigt werden, daß in die Arcusskala für kleine Winkel sowohl die Sinus- als auch die Tangens-Skala kleiner Winkel eingearbeitet wurde.

Dabei ist man von folgender Überlegung ausgegangen:

bis zu $3^0$ gilt: $\tan\alpha \approx \text{arc}\,\alpha$; wobei $\tan 3^0 \approx \text{arc}\,3^0 \approx 0{,}0524$

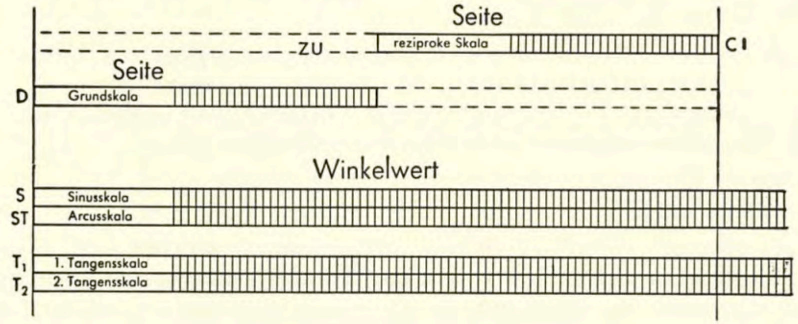
bis zu $5^0$ gilt: $\sin\alpha \approx \text{arc}\,\alpha$; wobei $\sin 5^0 \approx \text{arc}\,5^0 \approx 0{,}0872$.

Bringt man nun rechts und links neben den Teilstrichen der Werte für die vollen Grade auf der Arcusskala ST kleine Teilstriche als **Korrekturmarken** an, so ist man sofort in der Lage, mit ausreichender Genauigkeit die richtigen Funktionswerte für Sinus bzw. Tangens auf der Arcusskala ST einzustellen, bzw. sofort damit zu rechnen.

Mit diesem kleinen Kunstgriff hat man nun tatsächlich den Bereich aller Winkelfunktionsskalen so weit ausgedehnt, daß er sich von **$3^0$** bis **$87^0$** erstreckt. So ist die Forderung erfüllt, daß man in diesem Bereich bei allen trigonometrischen Aufgaben im rechtwinkligen Dreieck nach dem **gleichen, äußerst übersichtlichen Rechenschema** arbeiten kann.



Die nachstehend gezeigte Abbildung läßt den Rechenvorgang eindeutig erkennen.




Alle Winkelfunktionen stellen ein Verhältnis zweier Seiten des rechtwinkligen Dreiecks dar, so z. B.:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\;;\quad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\quad \text{usw.}$$

Da sich das Seitenverhältnis unter Benutzung der Reziprokskala CI durch eine einfache Streckenaddition darstellen läßt, braucht man nur jeweils an die **Skalenstrecke der D-Skala** die **Skalenstrecke der CI-Skala anzureihen** und erhält mit dem Endpunkt das Verhältnis **„Seite zu Seite“.**

Lotet man nun mit dem Läuferstrich auf die Winkelfunktionsskalen herunter, so kann man auf der entsprechenden Skala (ST für 0,01 x; S und $T_1$ für 0,1 x und $T_2$ für x) den Winkelwert ablesen.

Aber auch für den Fall, daß der Winkel und eine Seite gegeben sind, läßt sich das gleiche Rechenschema anwenden, nur muß hierbei erst der Winkelwert mit dem Läuferstrich aufgesucht werden, und auf den Skalen D oder CI die entsprechende Seite des Dreiecks berücksichtigt werden.

Für die Korrekturmarken der ST-Skala ist dabei zu merken, daß der **Tangenswert größer** und der **Sinuswert kleiner** als der Arcuswert ist, somit die **Sinusmarke links** und die **Tangensmarke rechts** vom Teilstrich der Arcusskala liegt.

Dieser Vorteil sei an einigen praktischen Beispielen erläutert:

1. Gegeben: die Katheten a = 6,12 und b = 87,5.
   Gesucht: der Winkel $\alpha$ und die Hypotenuse c.
   Man stellt C 1 über D 612 und bringt den Läufer über CI 875. Der Läuferstrich zeigt auf ST über der Tangens-Korrekturmarke $4^0$, somit ist der Winkel $\alpha = 4^0$. Bringt man nun den Läufer auf den Teilstrich $4^0$ der arc-Skala ST, so kann man auf CI den Wert 87,5 für c ablesen.
2. Gegeben: die Kathete b = 4,42 und die Hypotenuse c = 46,1
   Gesucht: der Winkel $\alpha$ und die Kathete a.

C 1 über D 442; Läufer auf CI 461; auf ST den Winkel invers mit 84,5° (statt 5,5) ablesen. Den Läufer um den Markenabstand nach rechts schieben und auf CI den Wert 45,9 für die Kathete a ablesen.

3. Aber auch bei Berechnungen im schiefwinkligen Dreieck ergeben sich, insbesondere wenn es sich dabei um sehr kleine Winkel handelt, wesentliche Vorteile. Soll z. B. die folgende Aufgabe unter Anwendung des Sinussatzes gelöst werden, so kann man die Lösung der Aufgabe mit einer Schiebereinstellung vornehmen.

   Gegeben: $\alpha = 6^0$; $\beta = 5^0$; $c = 165$
   Gesucht: a und b.

   Bekanntlich ist $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 169^0$ und $\sin\gamma = \sin(180^0 - \gamma) = \sin 11^0$. Man stellt somit C 165 über S 11° und kann auf der Arcusskala unter Benutzung der Korrekturmarken die Winkel mit dem Läuferstrich aufsuchen und auf der C-Skala die Werte für $a = 90{,}4$ und $b = 75{,}4$ ablesen.

4. Mit der übersichtlichen Unterbringung der trigonometrischen Skalen auf der Stabkörper-Vorderseite und Anwendung des oben erwähnten Rechenschemas lassen sich Aufgaben, die sonst umständlicherweise nur unter Anwendung des Kosinussatzes gelöst werden, sehr einfach und äußerst anschaulich rechnen.

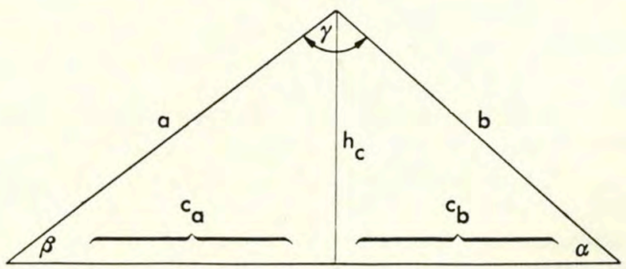
   Sind beispielsweise im schiefwinkligen Dreieck die beiden Seiten b und c sowie der Aufgaben, die sonst umständlicherweise nur unter Anwendung des **Kosinussatzes** $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha}$ zur Anwendung kommen.

   Zur Ermittlung des Winkels $\beta$ muß dann noch zusätzlich der Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

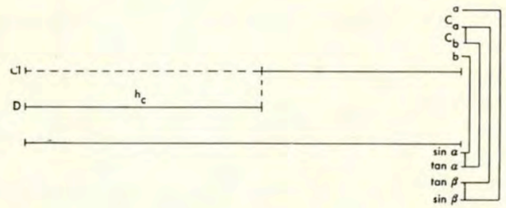
   benutzt werden.

   Wesentlich einfacher gestaltet sich die Rechnung mit dem Rechenstab unter Einführung der Höhe $h_c$ in den Rechnungsgang, entsprechend der Beziehungen:
   $h_c : b = \sin\alpha$; $h_c : c_b = \text{tg}\,\alpha$; $h_c : c_a = \text{tg}\,\beta$ und $h_c : a = \sin\beta$.






Diese Rechnungen sind alle mit einer Schiebereinstellung zu lösen, da die Höhe $h_c$ gleich bleibt.




5. Gegeben: $\alpha = 42^0$; $b = 5{,}1$ und $c = 8{,}2$.
   Man stellt CI 5,1 über S 42° und hat sofort die Grundeinstellung mit C 1 über D 3,41 für $h_c$ ).

   Bringt man nun den Läufer auf $T_1$ 42°, so kann man auf CI den Wert 3,79 für $c_b$ ablesen. Bildet man die Differenz von 8,2 (für c) und 3,79 (für $c_b$ ), so erhält man $c_a$ mit 4,41. Unter diesem Wert auf der CI-Skala erhält man auf der $T_1$-Skala für $\beta = 37{,}7^0$. Bringt man dann den Läufer auf S 37,7°, so kann auf CI für $a = 5{,}58$ abgelesen werden. Da $\gamma = 180 - \alpha - \beta = 180 - 42 - 37{,}7 = 100{,}3^0$ ist, sind alle Stücke des Dreiecks bekannt.

6. Gegeben: $\beta = 37{,}7^0$; $a = 5{,}58$; $c = 8{,}2$.
   Mit der Einstellung CI 5,58 über S 37,7 geht man sinngemäß vor und erhält mit $c_a = 4{,}41$ und $c_b = 3{,}79$ für $\alpha$ 42° und für $b = 5{,}1$.

7. Gegeben: $a = 5{,}58$; $b = 5{,}1$; $\gamma = 100{,}3^0$.
   Hier ist zu beachten, daß die Höhe $h_a$ zur Grundeinstellung verwendet wird und diese außerhalb des Dreiecks liegt, man stellt daher CI 5,1 über $S(180-\gamma) = S\,79{,}7^0$ und erhält $m_a = 0{,}91$. Mit $a + m_a = 5{,}58 + 0{,}91 = 6{,}49$ erhält man $\beta = 37{,}7^0$ und $\alpha = 42^0$ sowie $c = 8{,}2$.

Bei den neuen Schul-Rechenstäben wurden zudem die Winkelfunktionen in sinnvoller Weise in zwei Doppelskalen S—ST und $T_1$—$T_2$ angeordnet. Hierdurch ist das Rechnen mit allen trigonometrischen Funktionen von etwa 0,5°—89,5° möglich, wobei im Bereich von etwa 3° bis etwa 6° die Unterschiede tan zu sin und arc durch die Korrekturwerte berücksichtigt sind.

Zusammenfassend kann also gesagt werden:
Durch die erläuterten Skalenerweiterungen und -anordnungen wurden folgende Vorteile erreicht:

1. eine übersichtliche und umfangreiche **Winkelfunktionstabelle** in Skalenform,
2. **Korrekturmarken** berücksichtigen die Funktionsunterschiede bei kleinen Winkeln,
3. Anwendung **eines** Rechenschemas für alle trigonometrischen Rechnungen.

# Der Castell Schul-D-Stab

von Oberstudienrat Viktor Mathé, Nürnberg

Bei der Betrachtung der einfachen Rechenstäbe aller Ausführungen bemerkt man, daß sie in zwei Leitern C und D die herkömmliche Teilung bringen. Zumeist sieht man auf der Vorderseite noch Leitern für die Quadrat- und Kubikzahlen, manchmal sogar noch eine Leiter für die Mantissen der dekadischen Logarithmen. Die trigonometrischen Funktionen erscheinen in Leitern teilweise auf der Vorderseite des Stabes angebracht, teilweise auf der Rückseite der Zunge.

Eine Häufung von Skalen auf der Vorderseite des Stabes bringt oft eine Unübersichtlichkeit, die noch hie und da durch zu kleinen Druck zur Unerträglichkeit gesteigert wird. Die Fehlerquellen vermehren sich — wie die Erfahrung im Stabrechnen zeigt — sehr erheblich. Immer wieder erhebt sich die Frage, ob Stäbe, die eine solche Vielfalt von Skalen zeigen, in die Hand von Schülern gehören. Wenn man nun nach den gemachten Erfahrungen den neuen Castell-Schulrechenstab D betrachtet, so fällt einem sofort — trotz der Vielzahl der Skalen — die große Übersichtlichkeit wohltuend auf. Ein klarer und großer Druck vermittelt ein anschauliches Skalenbild. Dies wird durch die Anordnung als Doppelstab noch gefördert. Die bisherige Verwendung dieses Doppelstabes im Unterricht zeigt die verblüffende Tatsache, daß die Schüler rascher die Grundbegriffe des Stabrechnens sich aneignen, als dies bisher mit den herkömmlichen Schulstäben der Fall war. Daher auch der Wunsch, der auf einen einheitlichen Gebrauch des Doppelstabes hinzielt.

Sieht man sich in kritischer Haltung den neuen Doppelstab an, so sieht man auf der einen Seite das klassische Prinzip des Systems Rietz. In übersichtlicher Anordnung findet man die Skalen L, K, A, B, CI, C und D, hier zuzüglich der drei Skalen $LL_1$, $LL_2$ und $LL_3$. Die andere Seite des Doppelstabes wiederholt die Skalen C und D. Dies erweist sich ebenso als großer Vorteil, wie der beide Seiten des Stabes umgreifende Läufer. Die um den Faktor $\pi$ versetzten Skalen CF und DF stellen eine Bereicherung dar, die vom Schüler bald gerne vermerkt wird. Die Neuanordnung der trigonometrischen Skalen und der Arcus x-Skala zeigt, wie der Doppelstab an Übersichtlichkeit gewonnen hat. Das Wenden des Stabes bringt mit Hilfe des Läufers einen raschen Übergang von Skala zu Skala.

Die Skala $\sqrt{1-x^2}$ wird im Unterricht kaum vermißt, da die Skalen A und B eine rasche Umrechnung vermitteln. Überhaupt hat die Skala A im Zusammenhang mit der Skala D eine große Bedeutung bei der Berechnung nicht-rechtwinkliger Dreiecke mit Hilfe einer Umformung des Cosinus-Satzes.

Die Exponentialskalen $LL_1$, $LL_2$ und $LL_3$ erweitern den Rechenumfang der herkömmlichen Stäbe wesentlich. Mit ihrer Hilfe können nicht nur Werte der Exponentialfunktionen $e^x$ errechnet werden, sondern die drei Skalen bieten auch Möglichkeiten Werte von $a^x$, in x wie auch Werte der Logarithmen auf beliebiger Basis zu errechnen.

Ein Beispiel für die Funktion $y = e^x$:
Für $x = 3{,}4$ ($x = 0{,}34$) suche man auf D den Wert $x = 3{,}4$ ($x = 0{,}34$) und man findet unter dem Läuferstrich auf $LL_3$ den Wert $y = 29{,}9$ (auf $LL_2$ den Wert $y = 1{,}405$).



Ein Beispiel für die Funktion $y = \ln x$:

Für $x = 34$ suche man auf $LL_3$ den Wert $x = 34$. Darüber findet man unter dem Läuferstrich bei D den Wert für $y = 3{,}52$.

Ebenso können Exponentialfunktionen und Logarithmen auf beliebiger Basis a errechnet werden, z. B.: $y = a^x$.

Beispiel für $a = 4$:

Stellt man auf $LL_3$ den Läufer über 4 und bringt die Skala C mit 1 unter den gleichen Läuferstrich, so erhält man die Potenzen von 4.

Auf der Skala C erscheinen der Reihe nach die Potenzexponenten 1, 2, 3, 4, 5 und auf Skala $LL_3$ liest man darunter die Werte 4, 16, 64, 256, 1024 ab.

Will man umgekehrt Logarithmen auf Basis 4, so können sie bei gleicher Einstellung abgelesen werden.

Beispiel: Suche $y = {}^4\log 100$.

Skala C mit 1 über Skala $LL_3$ auf 4. Suche auf $LL_3$ den Wert 100. Man erhält darüber auf Skala C den Wert $y = 3{,}32$.

Ein anderes Beispiel: Es sei der Wert $y = a^x$ für $a = 17{,}5$ und $x = 2{,}4$ gesucht.

Man stelle auf $LL_3$ mit dem Läufer den Wert 17,5 ein und stelle die Skala C mit dem Wert 1 darüber. Verschiebt man nun den Läufer auf den Skalenwert 2,4 der Skala C, so erhält man darunter auf $LL_3$ den Wert $y \approx 960$ (genau 962).

Hat man schon früher mit der Einübung des Stabrechnens begonnen, so ergeben sich bei der Besprechung der Exponentialfunktionen und der Logarithmen im Unterricht günstige Auswirkungen.

Nunmehr können nicht nur Exponentialfunktionen und Logarithmen berechnet werden, sondern auch Zinseszins- und Rentenrechnung in das Stabrechnen einbezogen werden.

Ein Beispiel für periodische Einzahlung möge dies beleuchten.

Jemand zahlt bei $p = 3{,}5\%$ (also $q = 1{,}035$) jährlich k Mark ein. Wie groß ist der Wert $E_n$ aller Einzahlungen unmittelbar nach der siebenten Einzahlung?

$$E_n = kq^6 + kq^5 + kq^4 + kq^3 + kq^2 + kq + k$$

$$E_n = k \cdot (q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$$

$$E_n = k \cdot \frac{q^7 - 1}{q - 1} \qquad q = 1{,}035 \text{ und } n = 7$$

Man suche auf $LL_1$ den Wert $q = 1{,}035$ und bringe den Läufer darüber. Zieht man die Skala C mit 10 unter den Läuferstrich, so findet man unter C mit dem Wert 7 auf $LL_2$ den Wert $q^7 = 1{,}272$. Daraus ergibt sich für $q^7 - 1$ der Wert 0,272 und für $q - 1$ der Wert 0,035.

$$\text{So ist } E_7 = k \cdot \frac{0{,}272}{0{,}035} = k \cdot \frac{272}{35} \qquad \begin{array}{l} E_7 = k \cdot 7{,}77 \\ E_7 = 7{,}77 \cdot k \end{array}$$

Die mit $\pi$ vervielfachten Skalen CF und DF erleichtern das Stabrechnen sehr. Durch sie wird zumeist ein Durchschieben der Zunge um eine Dekadenlänge vermieden, wenn ansonsten bei Einstellungen das Ergebnis außerhalb der Grundskala D zu liegen kommt. Die Einbeziehung der um $\pi$ versetzten Skalen ergibt eine gute Übersicht bei der Einstellung von Proportionen, da ja naturgemäß die versetzten Skalen CF und DF die gleichen Verhältnisse aufweisen, wie die Skalen C und D. So ergibt sich bei Gegenüberstellung des Wertes 1 auf Skala C und des Wertes 1,7 auf Skala D folgendes:

| | | | |
|---|---|---|---|
| C | 1 | 2 | 3 |
| D | 1,7 | 3,4 | 5,1 |
| und für | | | |
| CF | 6,5 | 10 | 80 |
| DF | 11,05 | 17 | 136 |

Solche Umrechnungen finden sich im Unterricht wie im praktischen Leben, z. B. der Übergang von einer Währung zur anderen. So war vor der Währungsänderung der Wert von 1 DM gleich 1,7 norwegischer Kronen. Daraus ergibt sich aus dem vorhergehenden Beispiel, daß man für 80 DM 136 norwegische Kronen erhielt. Ebenso vereinfacht sich die Rechnung beim Übergang von einem Maßsystem zum anderen. So entspricht 1 inch gleich 25,4 mm. Man findet daher

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| C | 1 | 2 | und | 9 | auf CF |
| D | 25,4 | 50,8 | | 229 | auf DF |

Auch bei fortlaufenden Multiplikationen und Divisionen erweist sich der Übergang auf die versetzten Skalen als vorteilhaft. Kreisberechnungen können mit Hilfe der versetzten Skalen leicht durchgeführt werden.

Z. B. Es soll der Umfang eines Kreises mit $r = 3$ errechnet werden. $u = 2 r \pi$. Stellt man C mit dem Wert 1 über D mit dem Wert 3, so erhält man über C mit dem Wert 2 auf DF sofort den Wert für den Umfang mit $u = 18{,}8$.

Außerordentlich vorteilhaft und übersichtlich sind auch die Winkelfunktionen in ihren Werten angebracht. Auf der Skala S findet man die Funktion $y = \sin x$ für Werte von $x = 6$ Grad bis $x = 80$ Grad einwandfrei. Für kleinere Werte als $x = 6$ Grad ist der Übergang auf die Skala ST angebracht. Die Werte der Tangensfunktion sind auf zwei Skalen $T_1$ und $T_2$ übersichtlich für $x = 6$ Grad bis $x = 45$ Grad und $x = 45$ Grad bis $x = 84$ Grad angebracht. Die Cofunktionen sind in ihren Winkelwerten mit roter Ziffer eingetragen.

Die grüne Tönung des Untergrundes bei den Hauptskalen soll noch erwähnt werden. Diese Tönung trägt wesentlich mit bei, das Skalenbild übersichtlich zu gestalten.



# Trigonometrische Dreiecksauflösung mit dem FABER-CASTELL-Schul-D-Stab Nr. 52/82

von Professor Wilhelm Körperth, Wien

I

Im „Rechenstab-Brief" Nr. 1/1961 (Seite 4-8) wurde eingehend über die neuen Winkelfunktionsskalen auf den FABER-CASTELL-Schul-Rechenstäben berichtet und ihr Vorteil an einigen Beispielen der Dreiecksauflösung gezeigt.

Im „Rechenstab-Brief" Nr. 2/1961 (Seite 9) wird eine Umformung des Kosinussatzes besprochen, die sich für das Stabrechnen eignet. Im folgenden werden weitere Methoden der Dreiecksauflösung mit dem Rechenstab angegeben. Es werden wie bei der Dreiecksauflösung mittels der Logarithmen der Sinussatz, Tangenssatz und Halbwinkelsatz verwendet. Für das Rechnen mit dem Rechenstab wird als **einheitliche Methode die „Goldene Regel des Stabrechnens"** verwendet (siehe Handbuch der Schulmathematik, Band 1, Seite 126).

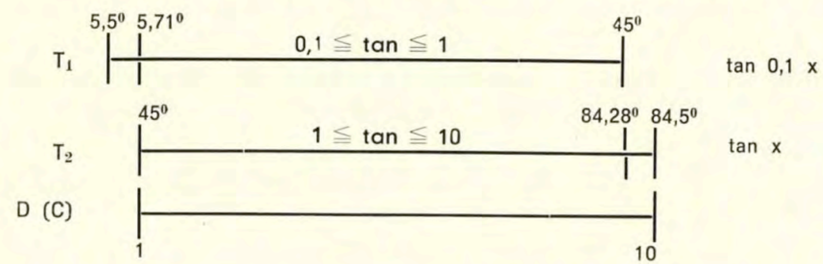
Die Verwendung des Rechenstabes bei der Dreiecksauflösung mit dem Sinussatz wurde schon oft in der Literatur dargestellt; sie wird nur der Vollständigkeit wegen wiederholt. Der Tangenssatz und der Halbwinkelsatz wurden dagegen, wie mir scheint, bei der Dreiecksauflösung mit dem Rechenstab noch nie verwendet. Der Grund liegt wohl darin, daß erst in dem angeführten FABER-CASTELL-Schul-D-Stab und im Schul-Stab Log-Log Nr. 57/89, sowie im FABER-CASTELL-Duplex 2/82, Rechenstäbe vorliegen, die drei Tangensskalen ($T_1$, $T_2$, ST) enthalten. Bei diesen Rechenstäben sind die drei Tangensskalen und die Sinusskala S auf dem Stabkörper angebracht. Erst das Vorhandensein der zwei Tangensskalen $T_1$, $T_2$ und der ST-Skala macht eine praktische Rechnung mit dem Rechenstab bei Verwendung des Tangenssatzes möglich.

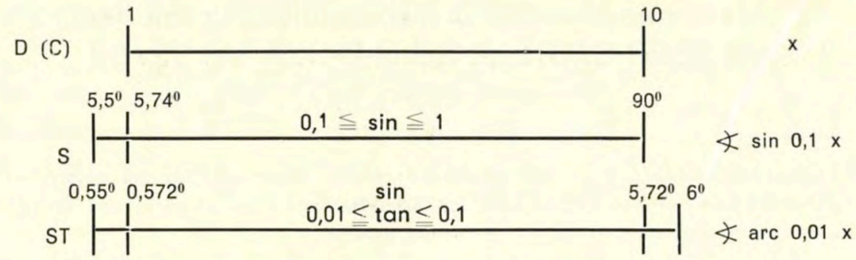
Die folgenden Beispiele behandeln alle Auflösungsfälle und sind so gewählt, daß alle Fälle vorkommen, die bei der Benützung des Rechenstabes auftreten können.

II

Bevor mit der Dreiecksauflösung begonnen wird, soll eine Übersicht über die auf dem FABER-CASTELL-Schul-D-Stab 52/82 vorkommenden Winkelfunktionsskalen mit Angabe des Stellenwertes gegeben werden.

Der **Stellenwert** wird bei jeder Rechnung **stets durch eine Überschlagsrechnung ermittelt.**






III

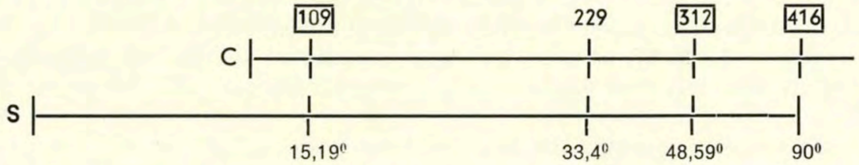
**Gegeben: Eine Seite und zwei Winkel (SWW)**

$$a = 229, \quad \alpha = 33{,}4^0, \quad \beta = 15{,}19^0$$

Für die Verwendung der angeführten Rechenstäbe wird der Sinussatz in folgender Form verwendet:

$$\frac{229}{\sin 33{,}4^0} = \frac{b}{\sin 15{,}19^0} = \frac{c}{\sin 48{,}59^0} = \frac{2r}{\sin 90^0}$$

Die Durchführung der Rechnung ist aus der folgenden Abbildung ersichtlich. Begonnen wird die Rechnung, indem man C 229 über S 33,4⁰ einstellt.




Ergebnis: $\gamma = 131{,}41^0$, $b = 109$, $c = 312$, $r = 208$

Bemerkungen:

1) Bei allen Dreiecksauflösungen (mit Ausnahme des Falles SSS) wird **stets mit einer Winkeleinstellung begonnen.**

2) Ein Durchschieben der Zunge wird in manchen Fällen notwendig sein. Bei Verwendung der versetzten Skalen CF, DF läßt sich diese fast immer vermeiden, wie die folgenden Beispiele zeigen.

IV

**Gegeben: Zwei Seiten und der Gegenwinkel der größeren Seite** ($SSW_g$)

$$a = 435, \quad c = 148, \quad \alpha = 14{,}13^0$$

$$\frac{435}{\sin 14{,}13^0} = \frac{148}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{2r}{\sin 90^0}$$

CF 435 / S 14,13⁰ // CF 148 / ST 4,76⁰ // S 18,89⁰ / CF 577 // S 90⁰ / CF 1780

Ergebnis: $\gamma = 4{,}76^0$, $\beta = 161{,}11^0$, $b = 5{,}77$, $r = 890$



V

**Gegeben: Zwei Seiten und der Gegenwinkel der kleineren Seite** ($SSW_k$)

$$a = 108, \quad b = 45, \quad \beta = 11{,}42^0$$

$$\frac{108}{\sin \alpha} = \frac{45}{\sin 11{,}42^0} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{2r}{\sin 90^0}$$

CF 45 / S 11,42⁰ // CF 108 / S 28,4⁰ // S 39,82⁰ / CF 145,5 // S 16,98⁰ / CF 66,3 // S 90 / CF 227

Ergebnis: $\alpha_1 = 28{,}4^0$, $\gamma_1 = 140{,}18^0$, $c_1 = 145{,}5$
$a_2 = 151{,}6^0$ $\gamma_2 = 16{,}98^0$, $c_2 = 66{,}3$, $r = 113{,}5$

VI

**Gegeben: Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (SWS)**

1. Beispiel: $a = 122$, $b = 62$, $\gamma = 162{,}1^0$

Zur Berechnung der übrigen Winkel des Dreiecks wird der Tangenssatz verwendet und in folgender Form angeschrieben:

$$\frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{a+b} = \frac{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}{a-b}; \quad \frac{\tan 8{,}95^0}{184} = \frac{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}{60}$$

Man stellt mit Hilfe des Läufers unter $T_1$ 8,95⁰ den Wert C 184 ein.
Auf der Skala D liest man den ungefähren Wert 0,15 für tan 8,95⁰ ab und macht die Überschlagsrechnung

$$\tan \frac{\alpha-\beta}{2} \approx \frac{0{,}15}{3} = 0{,}05.$$

Es muß daher der Wert von $\frac{\alpha-\beta}{2}$ auf der Skala ST abgelesen werden:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 2{,}94^0 \qquad T_1\ 8{,}95^0 \ /\ C\ 184$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 8{,}95^0 \qquad C\ 60\ /\ ST\ 2{,}94^0$$

$$\alpha = 11{,}89^0$$

$$\beta = 6{,}01^0$$

Um die fehlende Seite zu berechnen, verwendet man die Mollweidesche Gleichung

$$\frac{a-b}{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{c}{\cos \frac{\gamma}{2}}; \quad \frac{60}{\sin 2{,}94^0} = \frac{c}{\sin 8{,}95^0} \qquad c = 182$$

Stellenwertbestimmung durch die Überschlagsrechnung

$$c \approx \frac{60 \cdot 0{,}15}{0{,}05} = 180$$

Eine Änderung der Zungeneinstellung ist in diesem Fall nicht notwendig, da $\sin 2{,}94^0 \approx \tan 2{,}94^0$ ist. Man verschiebt nur den Läufer auf S $8{,}95^0$ und liest auf der Skala C den Wert für c ab.

Es ist also bei diesem Beispiel für die vollständige Auflösung des Dreiecks nur eine einzige Zungeneinstellung notwendig.

2. B e i s p i e l : $a = 197,\quad b = 53,\quad \gamma = 139{,}93^0$

$$\frac{\tan 20{,}03^0}{250} = \frac{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{144}$$

Eine Überschlagsrechnung ergibt, daß man $\frac{\alpha - \beta}{2}$ auf der Skala $T_1$ ablesen muß:

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 11{,}87^0 \qquad T_1\ 20{,}03^0\ /\ C\ 250$$
$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 20{,}03^0 \qquad C\ 144\ /\ T_1\ 11{,}87^0$$
$$\alpha = 31{,}9^0$$
$$\beta = 8{,}16^0$$

Zur Berechnung der fehlenden Seite muß man eine zweite Einstellung vornehmen:

$$\frac{144}{\sin 11{,}87^0} = \frac{c}{\sin 20{,}03^0}; \qquad c = 240$$

S $11{,}87^0$ / C 144 // S $20{,}03^0$ / C 240

3. B e i s p i e l : $a = 205,\quad b = 200,\quad \gamma = 24{,}18^0$

$$\frac{\tan 77{,}91^0}{405} = \frac{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{5}$$

Man stellt unter $T_2$ $77{,}91^0$ den Wert C 405 ein. Die Überschlagsrechnung

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} \approx \frac{4{,}7}{80} = 0{,}06$$

zeigt, daß man $\frac{\alpha - \beta}{2}$ auf der Skala ST ablesen muß:

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 3{,}3^0$$
$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 77{,}91^0$$
$$\alpha = 81{,}21^0$$
$$\beta = 74{,}61^0$$

Die Seite c berechnet sich nach der Gleichung:

$$\frac{5}{\sin 3{,}3^0} = \frac{c}{\sin 77{,}91^0} \qquad c = 85$$

Da die Skala ST verwendet wurde, benötigt man für die vollständige Dreiecksauflösung nur eine einzige Einstellung:

$T_2$ $77{,}91^0$ / C 405 // C 5 / ST $3{,}3^0$ // S $77{,}91^0$ / C 85



4. B e i s p i e l : $a = 156,\quad b = 119,\quad \gamma = 61{,}93^0$

$$\frac{\tan 59{,}03^0}{275} = \frac{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{37}$$

Man stellt unter $T_2$ $59{,}03^0$ den Wert C 275 ein. Die Überschlagsrechnung

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} \approx \frac{1{,}7}{7} = 0{,}24$$

zeigt, daß man $\frac{\alpha - \beta}{2}$ auf der Skala $T_1$ ablesen muß:

$$\frac{2}{\alpha - \beta} = 12{,}63^0 \qquad C\ 37\ /\ T_1\ 12{,}63^0$$
$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 59{,}03^0 \qquad T_2\ 59{,}03^0\ /\ C\ 275$$
$$\alpha = 71{,}66^0$$
$$\beta = 46{,}4^0$$

Für die Berechnung der Seite c ist eine zweite Einstellung nötig:

$$\frac{37}{\sin 12{,}63^0} = \frac{c}{\sin 59{,}03^0} \qquad S\ 12{,}63\ /\ CF\ 37$$
$$c = 145 \qquad S\ 59{,}03^0\ /\ CF\ 145$$

5. B e i s p i e l : $a = 309{,}6,\quad b = 110{,}2,\quad \gamma = 34{,}6^0$

$$\frac{\tan 72{,}7^0}{419{,}8} = \frac{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{199{,}4}$$

Man stellt unter $T_2$ $72{,}7^0$ den Wert C 419,8 ein. Die Überschlagsrechnung

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} \approx \frac{3{,}2}{2} = 1{,}6$$

zeigt, daß man $\frac{\alpha - \beta}{2}$ auf der Skala $T_2$ ablesen muß:

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 56{,}75^0 \qquad T_2\ 72{,}7^0\ /\ C\ 419{,}8$$
$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 72{,}7^0 \qquad C\ 199{,}4\ /\ T_2\ 56{,}75^0$$
$$\alpha = 129{,}45^0$$
$$\beta = 15{,}95^0$$

Für die Berechnung der Seite c ist eine zweite Einstellung nötig:

$$\frac{199{,}4}{\sin 56{,}75^0} = \frac{c}{\sin 72{,}7^0} \qquad S\ 56{,}75^0\ /\ C\ 199{,}4$$
$$c = 227{,}6 \qquad S\ 72{,}7^0\ /\ C\ 227{,}6$$

Zusammenfassung:

1) $\gamma > 90^0$

In diesem Fall ist $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2} < 45^0$. Wegen $\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta$,

ist auch $\frac{\alpha + \beta}{2} < 45^0$.

Man kommt daher mit der Tangensskala $T_1$ aus, wenn $5{,}5^0 < \frac{\alpha - \beta}{2} < 45^0$ ist. (Beisp. 2).

Man benötigt die Skala ST, wenn $0{,}55^0 < \frac{\alpha - \beta}{2} < 5{,}5^0$ ist (Beispiel 1).

2) $\gamma < 90^0$

Da in diesem Fall $\frac{\alpha + \beta}{2} > 45^0$ ist, braucht man schon zur Einstellung von tan $\frac{\alpha + \beta}{2}$ die Tangensskala $T_2$. Für $\frac{\alpha - \beta}{2}$ sind drei Fälle möglich:

| | | |
|---|---|---|
| $45^0 < \frac{\alpha - \beta}{2} < 84{,}5^0$ | Skala $T_2$ | (Beispiel 5) |
| $5{,}5^0 < \frac{\alpha - \beta}{2} < 45^0$ | Skala $T_1$ | (Beispiel 4) |
| $0{,}55^0 < \frac{\alpha - \beta}{2} < 5{,}5^0$ | Skala ST | (Beispiel 3) |

Bemerkungen:

1) Für den Fall $\gamma = 90^0$ (rechtwinkliges Dreieck) siehe VIII.

2) Die Dreiecksauflösung mit dem Rechenstab 52/82 nach der geschilderten Methode ist nur möglich, wenn die in den Rechnungen auftretenden Winkel in den Bereich $0{,}55^0 \ldots 84{,}5^0$ fallen (siehe auch II).

VII

**Gegeben: Die drei Seiten (SSS)**

$$a = 145, \quad b = 25, \quad c = 150$$

Man berechnet zuerst den Inkreisradius $\varrho$:

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$$

A 150 / B 160

$$\varrho = \sqrt{\frac{15 \cdot 135 \cdot 10}{160}}$$

B 135 / D 11,25

$$\varrho = 11{,}25$$

Für die Berechnung der Winkel verwendet man den Halbwinkelsatz:

| | | |
|---|---|---|
| $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a} = \frac{11{,}25}{15} \approx 0{,}7$ | $T_1$ | $\frac{\alpha}{2} = 36{,}86^0$ |
| $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b} = \frac{11{,}25}{135} \approx 0{,}08$ | ST | $\frac{\beta}{2} = 4{,}77^0$ |
| $\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-b} = \frac{11{,}25}{10} = 1{,}125$ | $T_2$ | $\frac{\gamma}{2} = 48{,}37^0$ |



| | |
|---|---|
| $\alpha = 73{,}72^0$ | CI 10 / D 11,25 |
| $\beta = 9{,}54^0$ | CI 15 / $T_1$ 36,86° |
| | CI 135 / ST 4,77° |
| $\gamma = 96{,}74^0$ | CI 10 / $T_2$ 48,37° |

Man stellt über D 11,25 mittels des Läufers den Wert CI 10 ein. Über CI 15 liest man auf $T_1$ den Winkel $\frac{\alpha}{2} = 36{,}86^0$ ab. Unter CI 135 steht auf der Skala ST der Winkel $\frac{\beta}{2} = 4{,}77^0$ und über CI 10 findet man auf der Skala $T_2$ den Winkel $\frac{\gamma}{2} = 48{,}37^0$.

VIII

Die angegebenen Methoden eignen sich auch gut für die Auflösung von **rechtwinkligen Dreiecken.**

Von den möglichen Auflösungsfällen soll nur der Fall besprochen werden, daß die beiden Katheten gegeben sind.

**Gegeben: Die beiden Katheten.**

$$a = 37{,}7, \quad b = 33{,}6$$

Verwendet wird ebenfalls der Tangenssatz ($\gamma = 90^0$):

$$\frac{\tan 45^0}{71{,}3} = \frac{\tan\frac{\alpha - \beta}{2}}{4{,}1}$$

Die Überschlagsrechnung tan $\frac{\alpha - \beta}{2} \approx \frac{4}{70} = 0{,}06$ zeigt, daß die Skala ST verwendet werden muß:

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 3{,}29^0$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 45^0$$

$$\alpha = 48{,}29^0$$

$$\beta = 41{,}71^0$$

Da die Skala ST verwendet wurde, läßt sich die Hypotenuse c ohne einer weiteren Einstellung ablesen:

$$\frac{4{,}1}{\sin 3{,}29^0} = \frac{c}{\sin 45^0}$$

$$c = 50{,}5$$

$T_1$ 45° / C 71,3
C 4,1 / ST 3,29°
S 45° / C 50,5

Aus den obigen Ausführungen ergibt sich, daß für die Dreiecksauflösung mittels des Rechenstabes der FABER-CASTELL-Schul-D-Stab 52/82 bestens geeignet ist.

In vielen Fällen ist mit einer einzigen Zungeneinstellung, auch im Fall SWS, die vollständige Dreiecksauflösung möglich.

Der Vorteil der angeführten Methoden liegt auch darin, daß die zur Anwendung kommenden Lehrsätze der Trigonometrie ohne eine weitere Umformung geeignet sind und bei Verwendung des Rechenstabes nur die „Goldene Regel" gebraucht wird.

## Anwendung der Sinus-Tangensschablone 945 zur Darstellung der ersten Abteilung der Sinusfunktion

von Studienrat i. R. Walter Schock, Lübeck

Will man den numerischen Wert der ersten Ableitung für einen Punkt der Sinusfunktion praktisch darstellen, so bilde man aus $y = \sin x$ die erste Ableitung $y' = \cos x$. Wählt man beispielsweise den Punkt $P_1$ für $x = 60^0$, so erhält man $y' = \cos 60^0 = 0{,}5$. Die Tangente am Punkt $P_1$ für $\sin x = 60^0$ hat somit die Neigung $\tan \alpha = 0{,}5$ (siehe Fig. 1, welche mit Hilfe der Sinusschablone gezeichnet ist).

Für den Punkt $P_2$ für $x = 90^0$ erhält man $y' = \cos 90^0 = 0$, also $\tan \alpha = 0$ und für den Punkt $P_3$ für $x = 180^0$ den Wert $y' = \cos 180^0 = -1$, also $\tan \alpha = -1$ (mithin $\alpha = 135^0$ oder $-45^0$).

Diese Werte lassen sich mit Hilfe der auf der Sinus-Tangens-Schablone Nr. 945 (s. letzte Umschlagseite) aufgebrachten Schemata leicht ermitteln.

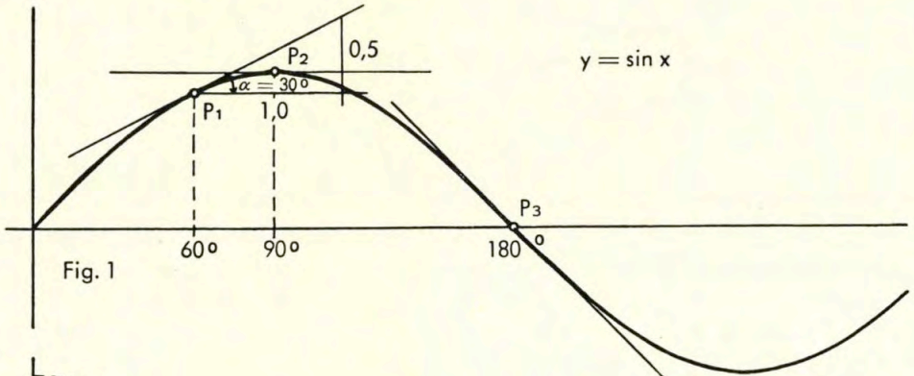



Fig. 1

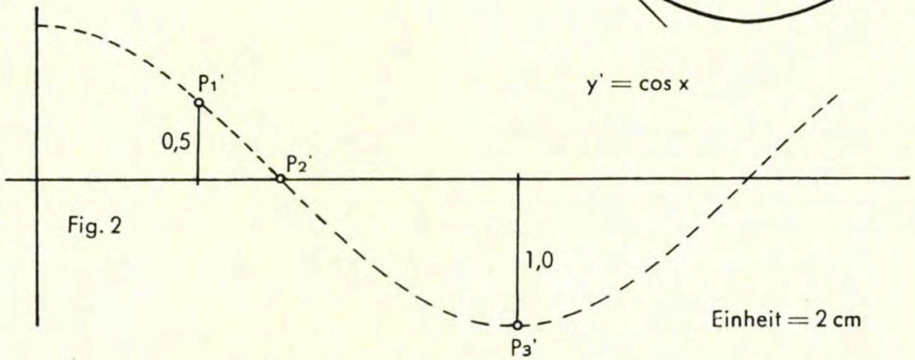



Fig. 2

Zeichnet man die so erhaltenen Werte der Ableitungen $P_1'$; $P_2'$ und $P_3'$ gemäß Fig. 2 ein, so läßt sich die Funktion der Ableitung als Cosinuslinie wieder mit Hilfe der Sinusschablone durch Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ einzeichnen.